

Zur Berechnung der Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen bei empirisch vorgegebenen Flächenstücken

Hoschek, J.

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 28, 1977,
S.107-117



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zur Berechnung der Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen bei empirisch vorgegebenen Flächenstücken

Von **J. Hoschek**, Darmstadt

Vorgelegt von **Hans Robert Müller**

Bei der Untersuchung der Gestalt von Teilen des menschlichen Körpers können die betrachteten Körperteile über ein projiziertes Raster mit Hilfe der Nahbereichs-photogrammetrie (vgl. z.B. [2], [6]) optisch vermessen werden. Von den dann durch Punkte P_i empirisch festgelegten Flächenstücken Φ_e interessieren z.B. bei Anwendungen in der kosmetischen Industrie in den Punkten P_i die *extremalen Flächenkrümmungen* sowie die *Richtungen*, in denen diese extremalen Flächenkrümmungen in den Punkten P_i des Flächenstückes Φ_e auftreten. In den Sprachgebrauch der Differentialgeometrie übertragen, bedeutet dies das Aufsuchen der *Hauptkrümmungen* und des Richtungsfeldes der *Krümmungslinien* in den Punkten P_i des empirisch vorgegebenen Flächenstückes Φ_e . Obwohl im Rahmen der Untersuchungen zur zeichnerischen Darstellung von Flächen (*Computer-Design*) und im Rahmen der *Spline-Approximation* von Flächen eine umfangreiche Literatur vorliegt (vgl. z.B. [1], [5]), scheint die obengenannte Problemstellung noch nicht diskutiert worden zu sein. In der vorliegenden Untersuchung soll daher eine Methode zur *numerischen* Berechnung der Hauptkrümmungen und des Richtungsfeldes der Krümmungslinien in den Punkten P_i eines empirisch vorgegebenen Flächenstückes Φ_e entwickelt werden.

Methodisch werden dabei differentialgeometrische Betrachtungen mit Verfahren aus der Ausgleichsrechnung verknüpft werden. Überlegungen aus der Statistik liefern dann eine Fehlerabschätzung der gefundenen Resultate. Anwendungen auf bekannte Flächenstücke zeigen abschließend die Wirksamkeit der entwickelten Methoden auf.

1. Theoretische Grundlagen

Wir betrachten zunächst im \mathbb{R}^3 ein *glattes* Flächenstück Φ , \vec{N} sei der normierte Normalenvektor in einem Punkt P von Φ . Die Hauptkrümmungen und die Tangenten an die Krümmungslinien von Φ in dem Punkt P lassen sich übersichtlich in einem begleitenden orthonormierten Bezugssystem $D(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{N})$ berechnen mit Ursprung in P und \vec{E}_i als orthonormierte Vektoren in der Tangentialebene von Φ im Punkt P . Das Bezugssystem D sei Basis eines kartesischen Koordinatensystems (x, y, z) . Wir setzen weiter voraus, daß das Flächenstück Φ im System D durch die wenigstens dreimal stetig differenzierbare Funktion

$$z = z(x, y)$$

dargestellt werde. Die Taylorentwicklung von $z = z(x, y)$ in Punkt $P(0, 0, 0)$ beginnt dann mit den Gliedern 2. Ordnung

$$2z = r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 + \dots, \quad (1)$$

wobei gesetzt wurde

$$\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x^2} = r_0, \quad \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y} = s_0, \quad \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y^2} = t_0.$$

Der Punkt P sei zunächst ein regulärer Flächenpunkt, d. h. wir setzen voraus, daß die zweiten partiellen Ableitungen in P nicht gleichzeitig verschwinden. Dann kann in P die Normalkrümmung κ_n der Fläche Φ in Richtung $dx:dy$ beschrieben werden über (vgl. z. B. [8])

$$\kappa_n = \frac{r_0(dx)^2 + 2s_0dxdy + t_0(dy)^2}{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad (2)$$

d. h. aber, in Punkt P haben die Fläche Φ und das oskulierende Scheitelparaboloid Λ

$$2z = r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 \quad (3)$$

dieselben Krümmungseigenschaften. Wird Λ auf Hauptachsen (ξ, η) transformiert, was geometrisch als Drehung um die z -Achse durch den Winkel φ mit

$$\tan 2\varphi = \frac{2s_0}{r_0 - t_0} \quad (4)$$

gedeutet werden kann, so geht (3) über in

$$2z = \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 \quad (3a)$$

mit λ_1, λ_2 als Eigenwerte der Koeffizientenmatrix der quadratischen Form (3). Daraus ergeben sich über (2) die Hauptkrümmungen κ_i von Φ im Punkt P

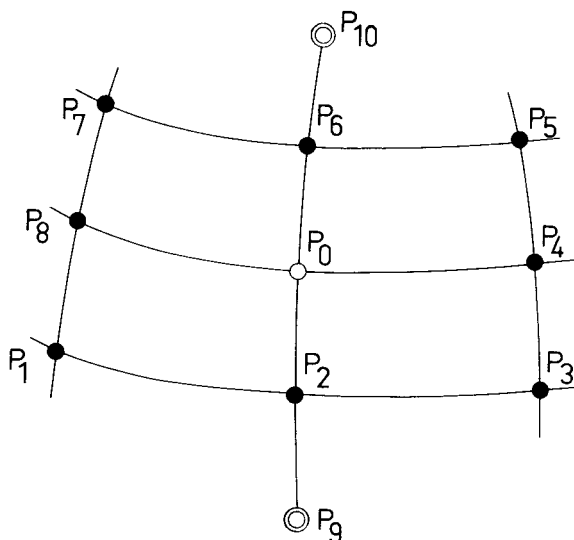
$$\kappa_1 = \lambda_1, \quad \kappa_2 = \lambda_2. \quad (5)$$

Die Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix von (3) liefern i. allg. die Hauptkrümmungsrichtungen des Flächenstückes Φ im Punkt P .

2. Numerische Auswertung

Wir gehen nun von einem durch Punkte P_i empirisch vorgegebenen Flächenstück Φ_e aus und müssen die Überlegungen des letzten Abschnittes auf Φ_e übertragen. Die Punkte P_i seien durch die Koordinaten (x_i, y_i, z_i) in einem kartesischen Bezugssystem D_0 gegeben. Wegen der in unserem Falle benutzten Projektion eines Rasters zur photogrammetrischen Erfassung der Punkte P_i können wir voraussetzen, daß die Punkte P_i ein Vierecksnetz bilden. Wir greifen einen Punkt P_0 heraus, der nicht auf dem Rand des Flächenstückes Φ_e liegen möge. Unter unseren Voraussetzungen erhält eine Umgebung um U_0 von P_0 acht unmittelbar benachbarte Punkte $P_1 \dots P_8$ (vgl. Fig. 1). Da die Durchmesser $d_1 = P_2P_8$ bzw. $d_2 = P_4P_6$ i. allg. verschieden sind, soll die Umgebung U_0 zur besseren Approximation von Φ_e über dem *minimalen* Durch-

messer d_i um die Punkte P_9, P_{10} erweitert werden (vgl. Fig. 1). Durch diese Punktwahl wird eine Kugelumgebung von P_0 festgelegt, in der alle Punkte $P_i \in U_0$ zu liegen kommen. Liegt der Punktanordnung eine allgemeinere Netzstruktur zugrunde, so kann U_0 etwa über alle Punkte P_i festgelegt werden, die in einer gewissen Kugelumgebung vom Radius ϱ liegen.



Figur 1:

Umgebung U_0 eines inneren Punktes P_0 des Flächenstückes Φ_e .

Wir haben nun die Aufgabe, mit Hilfe der Punkte $P_i \in U_0$ die *Tangentialebene* ε bzw. den *Normalenvektor* \vec{N} , die *Hauptkrümmungen* und die *Hauptkrümmungsrichtungen* in P_0 numerisch zu berechnen.

Wir wenden uns zunächst der *Tangentialebene* ε zu, da durch ε das oben eingeführte begleitende Bezugssystem D festgelegt wird. Durch die Punkte $P_1 \dots P_{10}$ ist die Tangentialebene ε von Φ_e in P_0 überbestimmt. Wir müssen daher auf Methoden aus der Ausgleichsrechnung (vgl. z.B. [3], [4]) zurückgreifen und wollen die Tangentialebene ε in P_0 so festlegen, daß die Summe der Quadrate der Abstände v_i der Punkte P_i ($i = 1 \dots 10$) von ε minimal wird, d.h. also gilt

$$\sum_{i=1}^{10} v_i \cdot v_i \stackrel{\text{def}}{=} [vv] = \min. \quad (6)$$

Zur Berechnung von (6) verschieben wir das Bezugssystem D_0 in den Schwerpunkt der Punkte $P_1 \dots P_{10}$, so daß für die transformierten Koordinaten der Punkte P_i aus U_0 gilt

$$[x] = 0, \quad [y] = 0, \quad [z] = 0. \quad (7)$$

Der Abstand v_i des Punktes P_i von der Tangentialebene ε kann nun so angesetzt werden

$$v_i = x_i \sin \varphi \cos \vartheta + y_i \cos \varphi \cos \vartheta + z_i \sin \vartheta - d \quad (8)$$

mit φ, ϑ , also noch zu bestimmenden Parametern. Die Summe der Abstandsquadrate berechnet sich nach (8) mit (7) zu

$$\begin{aligned} [vv] = & [xx] \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + [yy] \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \\ & + [zz] \sin^2 \vartheta + 10d^2 + [xy] \sin 2\varphi \cos^2 \vartheta \\ & + [xz] \sin \varphi \sin 2\vartheta + [yz] \cos \varphi \sin 2\vartheta. \end{aligned} \quad (9)$$

Für das Minimum von (9) gilt notwendig

$$\frac{\partial [vv]}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial [vv]}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial [vv]}{\partial d} = 0. \quad (10)$$

Die letzte Bedingung liefert $d = 0$, die beiden anderen Ableitungen führen auf das nichtlineare System der sog. *Normalgleichungen*

$$\begin{aligned} \sin \vartheta ([yz] \sin \varphi - [xz] \cos \varphi) - \cos \vartheta ([xx] - [yy]) \cdot \\ \cdot \sin \varphi \cos \varphi + [xy] \cos 2\varphi = 0, \\ \sin 2\vartheta ([xx] \sin^2 \varphi + [yy] \cos^2 \varphi - [zz] + [xy] \sin 2\varphi) - \\ - 2 \cos 2\vartheta ([xz] \sin \varphi + [yz] \cos \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Aus (11) kann $\tan \vartheta$ eliminiert werden, so daß sich (11) auf eine kubische Gleichung in $\tan \varphi$ reduziert. Die reellen Nullstellen dieser Gleichung liefern über eine Gleichung von (11) die relativen Extremwerte von (9). Der genäherte Normalvektor \vec{N}_e in P_0 werde nun durch das absolute Minimum (φ_0, ϑ_0) von (9) festgelegt, so daß für den Normalvektor \vec{N}_e in P_0 gelten soll

$$\vec{N}_e = (\sin \varphi_0 \cos \vartheta_0, \cos \varphi_0 \cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0). \quad (12)$$

Tabelle 1 enthält Tests des hier skizzierten Verfahrens bei einem Torusstück und zeigt, daß selbst bei relativ großen Abständen benachbarter Punkte P_i die Normale in P_0 sehr genau angenommen wird. – Die Approximation kann bei sehr großen Abständen der Punkte P_i vom Punkt P_0 noch dadurch verbessert werden, daß man statt P_i den Punkt \bar{P}_i auf der Verbindungsgeraden von P_0 und P_i wählt, der reziproken Abstand von P_0 besitzt. – Durch die Normale \vec{N}_e und zwei beliebig wählbare orthonomierte Vektoren \vec{E}_1, \vec{E}_2 senkrecht zu \vec{N}_e ist das oben eingeführte begleitende Bezugssystem D im Punkt P_0 des Flächenstücks Φ_e festgelegt. Wir können nun die Koordinaten der Punkte $P_i \in U_0$ in das Bezugssystem D transformieren und dann Φ_e in P_0 approximieren.

Nach den Überlegungen in Abschnitt 1 könnten wir nun Φ_e in P_0 gemäß (3) durch das Paraboloid

$$z = a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 \quad (13)$$

annähern. Eine Approximation gemäß (13) liefert aber bei größerem Abstand der Punkte P_i von P_0 sowie beim Übergang von elliptischen zu hyperbolischen Flächen-

gebieten unbefriedigende Resultate. Daher soll der Ansatz (13) kubisch erweitert werden zu

$$z = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3. \quad (14)$$

Auch hier sind die sieben Koeffizienten a_i durch die zehn Punkte $P_i \in U_0$ überbestimmt. Wir wollen daher wieder ein Ausgleichsverfahren ansetzen und fordern, daß die Summe der Abweichungsquadrate sämtlicher z -Koordinaten minimal wird, also gilt

$$[OO] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{10} (z_i - \bar{z}_i)^2 = \min. \quad (15)$$

mit \bar{z}_i gemäß dem Ansatz (14). Die Forderung (15) führt auf die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial [OO]}{\partial a_j} = 0 \quad (j = 1 \dots 7). \quad (16)$$

Daraus ergibt sich das folgende lineare System der Normalgleichungen

$$\begin{pmatrix} [x^4] & [x^3y] & [x^2y^2] & [xy^3] & [x^5] & [x^4y] & [x^3y^2] & [x^2y^3] \\ [x^3y] & [x^2y^2] & [xy^3] & [x^4y] & [x^3y^2] & [x^2y^3] & [xy^4] & [y^5] \\ [x^2y^2] & [xy^3] & [x^4y] & [x^3y^2] & [x^2y^3] & [xy^4] & [y^5] & [x^4y^2] \\ [x^4y] & [x^3y^2] & [x^2y^3] & [x^5] & [x^4y] & [x^3y^2] & [x^2y^3] & [x^4y^2] \\ [x^3y^2] & [x^2y^3] & [xy^4] & [x^4y^2] & [x^3y^3] & [x^2y^4] & [xy^5] & [x^4y^2] \\ [x^2y^3] & [xy^4] & [y^5] & [x^3y^3] & [x^2y^4] & [xy^5] & [y^6] & [xy^5] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [zx^2] \\ [zxy] \\ [zy^2] \\ [zx^3] \\ [zx^2y] \\ [zxy^2] \\ [zy^3] \end{pmatrix} \quad (17)$$

Sind in der Lösung von (17) die Koeffizienten $a_1 \dots a_3$ nicht näherungsweise gleich Null, so führen nach unseren obigen Überlegungen die *Eigenwerte* λ_i der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_2}{2} & a_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

gemäß (5) wegen des Ansatzes (14) auf die *Hauptkrümmungen*

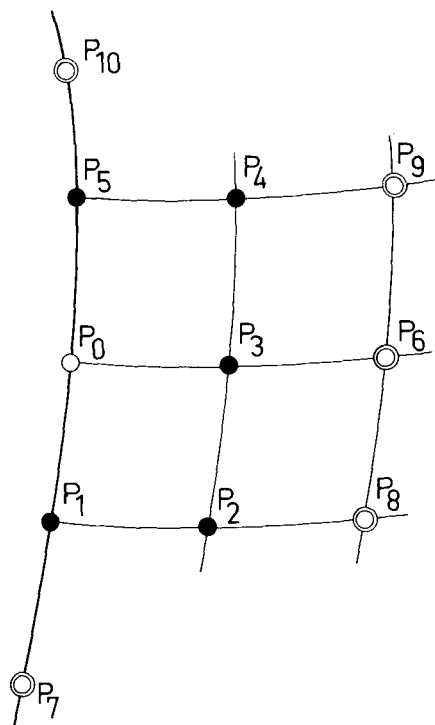
$$\kappa_1 = 2\lambda_1, \quad \kappa_2 = 2\lambda_2, \quad (19)$$

die *Eigenvektoren* von (18) auf die Tangenten an die Krümmungslinien im Punkt P_0 der empirisch vorgegebenen Fläche Φ_e . – Nun wird in der Umgebung U_0 von P_0 ein neuer Punkt P_1 als Ausgangspunkt \bar{P}_0 gewählt, die Umgebung \bar{U}_0 von \bar{P}_0 festgelegt. Wiederholung des durch (6) bis (18) beschriebenen Verfahrens liefert Hauptkrümmungen und Tangenten an die Krümmungslinien in \bar{P}_0 .

Sind die Koeffizienten $a_1 \dots a_3$ näherungsweise gleich Null, so ist die Umgebung von P_0 *nicht regulär*. In diesem Falle müssen die kubischen Terme zur Ermittlung der Krümmungen herangezogen werden (vgl. z.B. [7]).

Um dieses Verfahren auch auf Randpunkte P_1^* von Φ_e übertragen zu können, muß die Umgebung U_0^* eines Punktes P_0^* anders gewählt werden als im Innern von Φ_e .

Ein Punkt P_0^* besitzt i. allg. nur fünf direkt benachbarte Punkte $P_1 \dots P_5$, wir wollen daher gemäß Fig. 2 die Punkte $P_6 \dots P_{10}$ zur Umgebung U_0^* zusammenfassen. Damit sind die oben beschriebenen Verfahren direkt anwendbar.



Figur 2:
Umgebung U_0^* eines Punktes P_0^* am Rande des Flächenstückes Φ_e .

3. Fehlerdiskussion

Wir wenden uns nun der Fehlerabschätzung unseres Verfahrens zu und betrachten zunächst das Ausgleichsverfahren (14) – (17). Unter Berücksichtigung von (16) berechnet sich die Fehlerquadratsumme (15) zu

$$[QQ] = [zz] - a_1[x^2z] - a_2[xyz] - a_3[y^2z] - a_4[x^3z] - a_5[x^2yz] - a_6[xy^2z] - a_7[y^3z], \quad (20)$$

wobei die a_i über die Normalgleichungen (17) ermittelt worden sind.

Daraus berechnet sich der mittlere Fehler m der z_i -Koordinaten (vgl. z.B. [3], [9]) über

$$m = \sqrt{\frac{[QQ]}{f}} \quad (21)$$

mit f als Zahl der Freiheitsgrade, d. h. der Zahl der überschüssigen Beobachtungen, jetzt also $f = 3$. Die mittleren Fehler m_j der ausgeglichenen Unbekannten a_j lassen sich daraus berechnen zu (vgl. [3], [9])

$$m_j = m \sqrt{P_{jj}} \quad (22)$$

mit P_{jj} (Gewichtsfaktoren) als Diagonalelementen der inversen Matrix der Koeffizientenmatrix von (17) (vgl. [9]).

Nun müssen noch die Auswirkungen der mittleren Fehler m_j der Koeffizienten a_j auf die Hauptkrümmungen berücksichtigt werden. Dabei ist zu beachten, daß die Hauptachsentransformation im begleitenden Bezugssystem D geometrisch als Drehung durch den Winkel α mit

$$\tan 2\alpha = \frac{a_2}{a_1 - a_3} \quad (23)$$

gedeutet werden kann. Unter Berücksichtigung von (23) ergeben sich dann die mittleren Fehler $\Delta\lambda_i$ der Eigenwerte λ_i und über (19) die mittleren Fehler $\Delta\kappa_i$ der Hauptkrümmungen κ_i .

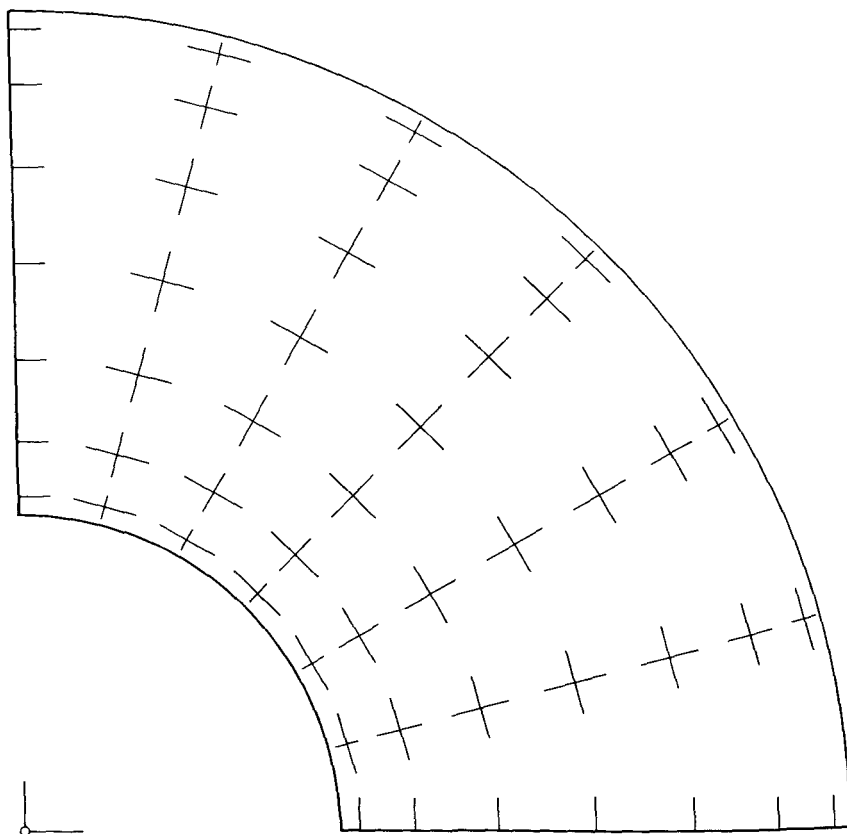
Zur Fehlerermittlung der Komponenten des Normalenvektors sind obige Überlegungen analog anzuwenden. Jetzt ist $f = 7$ und der mittlere Fehler m folgt unmittelbar aus (21) und (9). Zur Berechnung der Gewichtsfaktoren P_{jj} ist (8) durch Taylorreihenentwicklung zu linearisieren und das dann entstehende lineare System der Normalgleichungen zu invertieren (vgl. z. B. [3]).

Da die Fehler der Normalenkomponenten i. allg. sehr klein sind, kann ihre Auswirkung auf die Normalgleichungen (17) i. allg. vernachlässigt werden, da die dort auftretenden Potenzen von mindestens der 3. Ordnung sind.

4. Beispiele

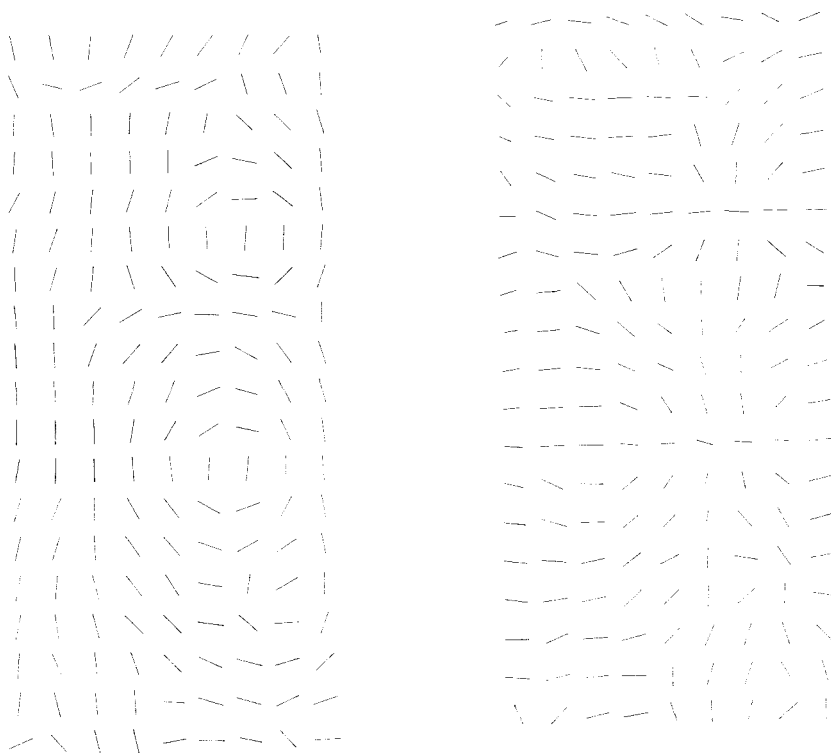
Um die Wirksamkeit der in der vorliegenden Untersuchung aufgezeigten Methoden zu überprüfen, soll abschließend das hier beschriebene Verfahren auf ein Torusstück angewandt werden. In *Tabelle 1* sind *numerische Resultate* und *exakte Ergebnisse* für einen elliptischen, einen parabolischen und einen hyperbolischen Flächenpunkt in Abhängigkeit von dem Abstand benachbarter Punkte gegenübergestellt. Auffallend ist die hohe Genauigkeit des näherungsweise gefundenen Normalenvektors und die gute Approximation der Hauptkrümmungen selbst bei größerem Abstand benachbarter Flächenpunkte. *Fig. 3* zeigt das näherungsweise ermittelte *Richtungsfeld* der Krümmungslinien des *Torus* gemäß *Tab. 1* in einer Parallelprojektion in Achsenrichtung, die Parameterdifferenz benachbarter Punkte beträgt dabei $\Delta u = \frac{\pi}{8}$, $\Delta v = \frac{\pi}{12}$. Ein Maß für die Neigung der Feldvektoren gegenüber der Projektionsebene ist ihre Verkürzung in der Projektion, da im räumlichen Modell die Feldvektoren gleiche Länge besitzen. Die exakten Krümmungslinien würden sich hierbei als konzentrische Kreise um die Torusachse und als Geradenbüschel durch die

Achse abbilden. Das näherungsweise gefundene Richtungsfeld spiegelt dieses Verhalten deutlich wieder.



Figur 3:
Torusstück in Normalprojektion und Richtungsfeld der Krümmungslinien.

Fig. 4 schließlich zeigt eine Parallelprojektion des Richtungsfeldes der beiden Scharen von Krümmungslinien eines *empirisch vorgegebenen Flächenstückes* Φ_e (Achselhöhlenbereich einer Frau), die zugehörigen Flächenpunkte von Φ_e sind die jeweiligen Mittelpunkte der Feldvektoren. Die Richtungsänderung der Feldvektoren weist auf die auftretenden Krümmungsänderungen hin, die Länge der Feldvektoren ist wieder ein Maß für die Neigungsänderung der Tangentialebenen von Φ_e . Solche Untersuchungen sind in Verbindung mit statistischen Überlegungen zur Erfassung eines repräsentativen Querschnitts für die Konstruktion von Scherköpfen bei Elektro-rasierern von Bedeutung.



Figur 4:
Die Richtungsfelder der beiden Scharen der Krümmungslinien eines empirisch vorgegebenen Flächenstückes (Achselhöhle einer Frau).

Literatur

- [1] BARNHILL R.E. – RIESENFELD, R.F.: Computer aided geometric design. Academic Press, New York 1974.
- [2] GELHAUS, R.: Analytisch-photogrammetrische Nahbildmessung. Diss. Hannover 1966.
- [3] HARDTWIG, E.: Fehler- und Ausgleichsrechnung. Bibliograph. Institut, Mannheim 1968.
- [4] LINNIK, J. W.: Die Methode der kleinsten Quadrate in moderner Darstellung. VEB Verlag d. Wiss., Berlin 1961.
- [5] Mc LAIN, D.H.: Computer construction of surfaces through arbitrary points. Information Processing 1974. North-Holland Publishing 1974.
- [6] SCHWIDEFSKY, K. – ACKERMANN, F.: Grundriß der Photogrammetrie. 7. Auflage, Teubner, Stuttgart 1976.
- [7] STÄCKEL, P.: Neue Beiträge zur Flächentheorie. Sitzungsberichte Akad. Wiss. Heidelberg, Jahrgang 1916, 1. Abhandlung.
- [8] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie III. Walter de Gruyter, Berlin 1959.
- [9] ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 4. Auflage, Springer, Berlin 1963.

Torus: $x = 9 \cos v + 4 \cos v \cos u$, $y = 9 \sin v + 4 \sin v \cos u$, $z = 4 \sin u$

Punkt		Nachbarpunkt		Normalenvektor			Hauptkrümmungen	
u	v	Δu	Δv	N_x	N_y	N_z	κ_1	κ_2
$\frac{\pi}{3}$	0	exakt		0,50000	0,00000	0,86603	0,04545	0,25000
		$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{36}$	0,50071	0,00000	0,86561	0,04558	0,25173
		$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	0,50288	0,00000	0,86436	0,04599	0,25699
		$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	0,50651	0,00000	0,86223	0,04682	0,26597
		$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$	0,51222	0,00000	0,85885	0,04183	0,28818
		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{36}$	0,52812	0,00000	0,84917	0,04700	0,31999
$\frac{\pi}{2}$	0	exakt		0	0,00000	1,00000	0	0,25000
		$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{36}$	0,00136	0,00000	1,00000	0,00009	0,25169
		$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	0,00552	0,00000	0,99998	0,00042	0,25685
		$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	0,01285	0,00000	0,99991	0,00121	0,26566
		$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$	0,01401	0,00000	0,99990	0,00710	0,28775
		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{36}$	0,04341	0,00000	0,99906	0,00019	0,31909
$\frac{5\pi}{6}$	0	exakt		-0,86603	0,00000	0,50000	-0,15644	0,25000
		$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{36}$	-0,86591	0,00000	0,50020	-0,15692	0,25177
		$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	-0,86557	0,00000	0,50080	-0,15838	0,25719
		$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	-0,86489	0,00000	0,50200	-0,16081	0,26650
		$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$	-0,86557	0,00000	0,50080	-0,17791	0,28884
		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{36}$	-0,86276	0,00000	0,50561	-0,18161	0,32346

Tabelle 1:

Exakte Werte und Näherungen der Komponenten des Normalenvektors und der Hauptkrümmungen eines Torus in Abhängigkeit vom Abstand der Nachbarpunkte.